Izračunavanje broja elementarnih događaja

- Pravilo množenja
- Permutacije
- Kombinacije
- Hipergeometrijsko pravilo

Pravilo množenja - kombinatorika

Bacaju se dvije šestostrane kocke. Postoji šest mogućih ishoda bacajući prvu kocku (1,2,3,4,5,6) i šest mogućih ishoda bacajući drugu kocku (1,2,3,4,5,6). Ukupno, postoji 6*6=36 mogućih ishoda bacajući dvije kocke.

Uopšte, **ako ima *n* događaja i događaj *i* se može ostvariti na N_i mogućih načina, tada broj načina na koji se može niz *n* događaja ostvariti je $N_1 N_2 \cdots N_n$.**

- Izabrati 5 karata iz špila od 52 - **sa vraćanjem**
  - $52*52*52*52*52=52^5$ 380204032 različitih mogućih ishoda
- Izabrati 5 karata iz špila od 52 - **bez vraćanja**
  - 52*51*50*49*48 = 311875200 različitih mogućih ishoda

1. Neki student mora da izabere tri predmeta za sledeći semestar. Ako odluči da slučajno izabere po jedan predmet iz 8 ekonomskih predmeta, 6 matematičkih i 5 informatičkih, moguće je:
   - 249 različitih ishoda
   - **240 različitih ishoda**
   - 19 različitih ishoda
   - 30 različitih ishoda

   8*6*5

Permutacije - Faktorijel

Na koliko različitih načina se mogu poređati 3 slova A, B, i C?

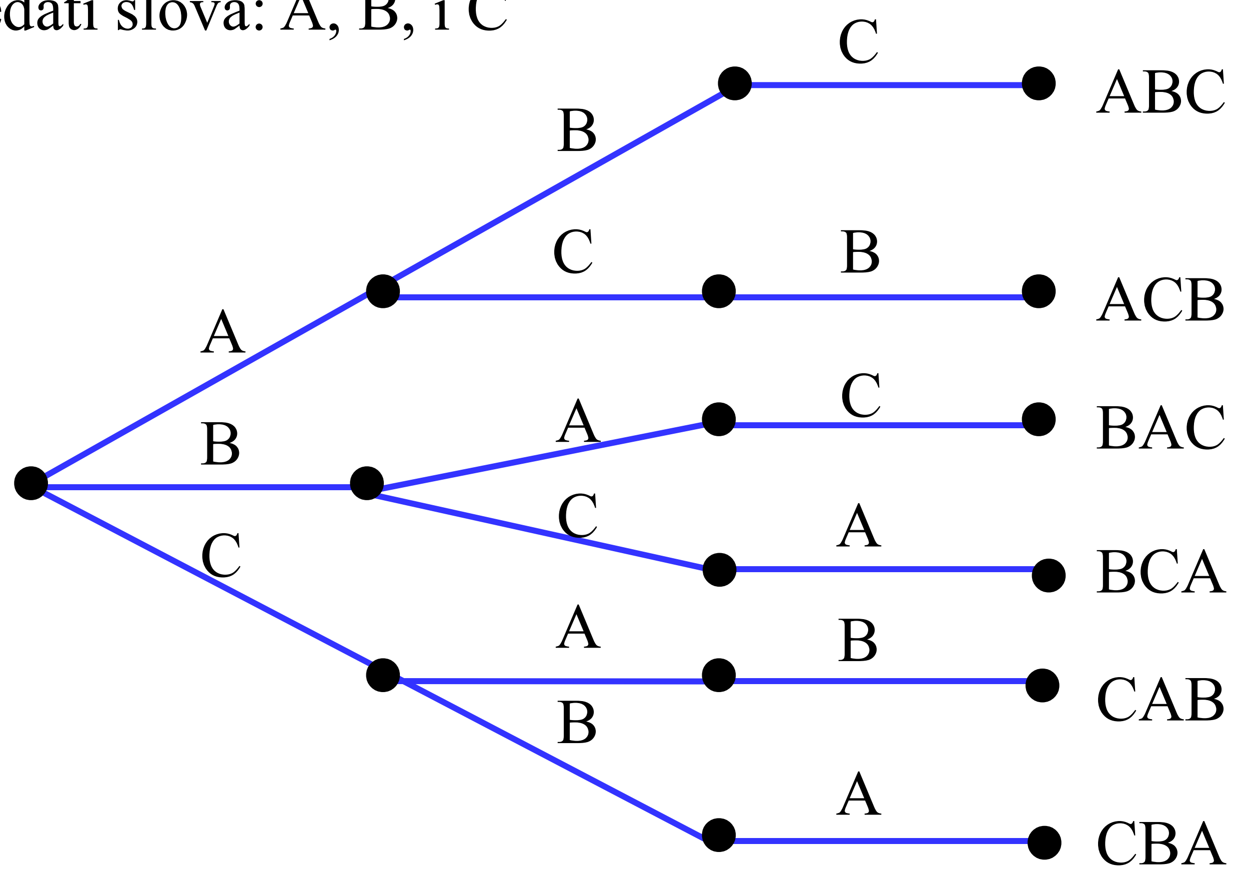
3*2*1 = 6 mogućih načina

Koliko ima načina da se poređaju 6 slova A, B, C, D, E, i F? (6*5*4*3*2*1 = 720)

Faktorijel: Za svaki pozitivan cijeli broj *n*, definišemo ***n faktorijel*** kao: $n(n-1)(n-2)\ldots(1)$. Označavamo ga sa ***n!***.
Broj *n!* Je broj načina na koji se *n* objekata može urediti. Po definiciji $1! = 1$.

(Stablo dijagram)

Poređati slova: A, B, i C



Permutacije

Permutacije su moguće **uređene** selekcije od *r* objekata od ukupno *n* objekata.

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$Npr:$

$$_6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1} = 6*5*4 = 120$$

Kombinacije

Kombinacije su mogući izbori od *r* elemenata iz grupe od *n* elemenata bez obzira na poredak izbora.

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = {}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{r!\,(n-r)!}}$$

$Npr:$

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = {}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{(3*2*1)(3*2*1)} = \frac{6*5*4}{3*2*1} = \frac{120}{6} = 20$$

Kombinacije – primjer 2

- Investitor će slučajno odabrati 6 od 20 tržišta za investiranje. Koliko je mogućih različitih izbora?

$$C_{20}^{6} = \binom{20}{6} = \frac{20!}{6!(20-6)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot ... \cdot 15 \cdot 14!}{720 \cdot 14!} = 38760$$

- Prodavnica sladoleda nudi 25 različitih ukusa. Koliko različitih načina postoji da se izaberu 2 različita ukusa?

$$C_{20}^{6} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

PRIMJER 3

- 10 kandidata se javilo na konkurs za 3 radna mjesta. Koliko je različitih izbora?

$$C_{10}^{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Hipergeometrijsko pravilo

- Skup od n elemenata sadrži dva disjunktna podskupa od n1 i n2 elemenata. Bira se r1 elemenata iz prvog podskupa i r2 elemenata iz drugog. Broj mogućih izbora je:

$$C_{r_1}^{n_1} \cdot C_{r_2}^{n_2}$$

- Primjer 4.: Iz skupa od 10 studenata, među kojima su tri studentkinje, želimo da formiramo skup od 4 predstavnika sa jednom studentkinjom. Koliko je mogućih različitih grupa?

$$C_1^{3_1} \cdot C_3^7 = \binom{3}{1}\binom{7}{3} = 3 \cdot 35 = 105$$

PRIMJER 5

- Osoba ima 10 košulja i 8 kravata. Koliko mogućih parova košulja/kravata može napraviti?
- *(10)(8) = 80.*

Primjer 6. Vjerovatnoća

Kutija sadrži kompjuterske djelove koji mogu biti ispravni ili ne. Ako se biraju dva dijela slučajnim putem, događaj – Prvi dio je ispravan a drugi neispravan je:

- **prost**
- Složen

- Objašnjenje: prost događaj obuhvata samo jedan ishod iz prostora uzorka, a složen događaj obuhvata dva ili više ishoda!
- S={II, **IN**, NI, NN}

4 Slučajne promjenljive

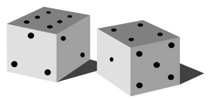
- Statistike
- Očekivana vrijednost prekidne slučajne promjenljive
- Binomna raspodjela
- Ostale prekidne raspodjele vjerovatnoće
- Neprekidne slučajne promjenljive
- Zaključak

Slučajne promjenljive

Slučajna promjenljiva je funkcija koja pridružuje jedinstvenu, ali promjenljivu, vrijednost svakom elementu prostora uzorka.

Raspodjela vjerovatnoće slučajne promjenljive je tabela koja sadrži moguće vrijednosti slučajne promjenljive i njima pridružene vjerovatnoće**.**

Primjer 4-1

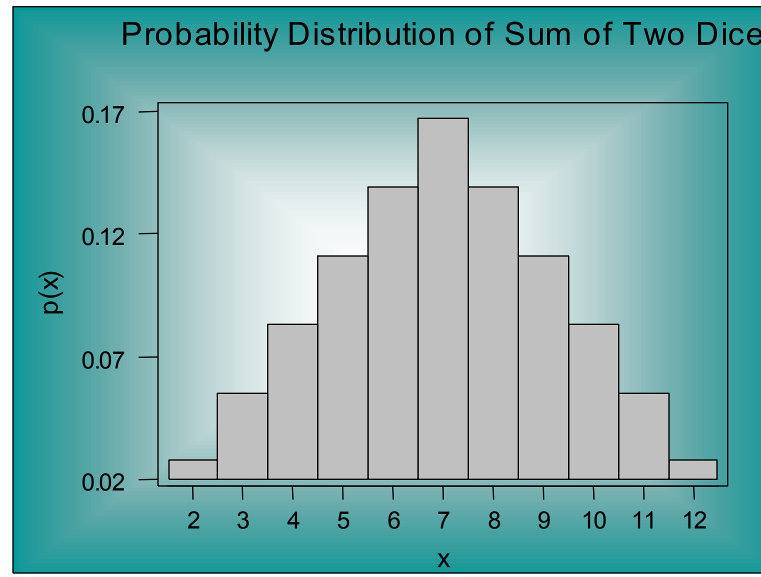


Posmatrajmo eksperiment **bacanja dvije šestostrane kocke**. Odrediti raspodjelu slučajne promjenljive **X koja predstavlja zbir brojeva na dvije kocke**:

Ima **36 mogućih ishoda**.

	2	3	4	5	6	7
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	8
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	9
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	10
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	11
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	12
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	

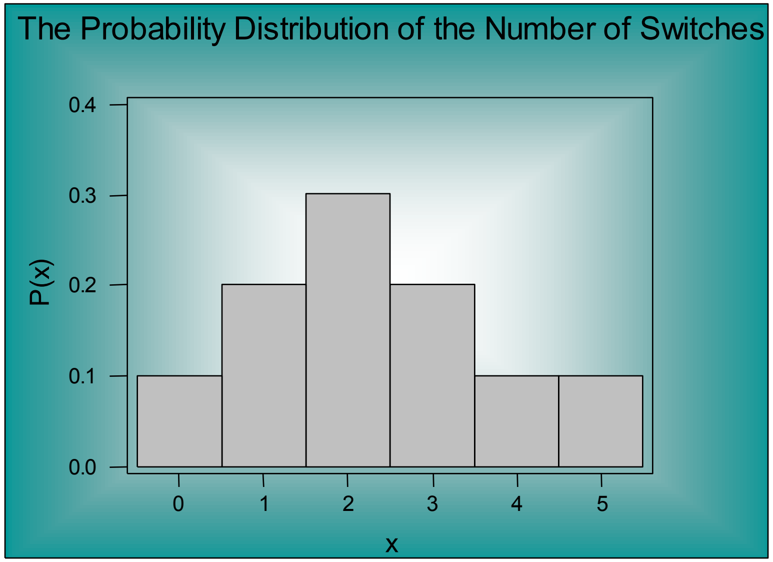
x	**P(x)***
2	**1/36**
3	**2/36**
4	**3/36**
5	**4/36**
6	**5/36**
7	**6/36**
8	**5/36**
9	**4/36**
10	**3/36**
11	**2/36**
12	**1/36**
	1



Primjer 4-2

Raspodjela vjerovatnoće za broj kvarova na mašini je:

x	P(x)
0	0.1
1	0.2
2	0.3
3	0.2
4	0.1
5	0.1
	1



Vjerovatnoća za više od 2 kvara:

$$P(X > 2) = P(3) + P(4) + P(5) = 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.4$$

Vjerovatnoća od barem 1 kvara:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - 0.1 = .9$$

Prekidne i neprekidne slučajne promjenljive

Prekidna slučajna promjenljiva:

- ima prebrojiv iznos mogućih vrijednosti
- ima prekidne skokove između dostignutih vrijednosti
- ima mjerljivu vjerovatnoću pridruženu svim vrijednostima
- broji

Neprekidna slučajna promjenljiva:

- ima neprebrojivo mnogo mogućih vrijednosti
- kreće se neprekidno od jedne do druge vrijednosti
- nema mjerljivu vjerovatnoću pridruženu svakoj vrijednosti
- mjeri (npr.: visina, težina, brzina, vrijednost, trajanje, dužina)

Pravila prekidne raspodjele vjerovatnoća

$$1.\ P(x) \geq 0 \text{ za sve vrijednosti x.}$$

$$2.\ \sum_{\text{sve x}} P(x) = 1$$

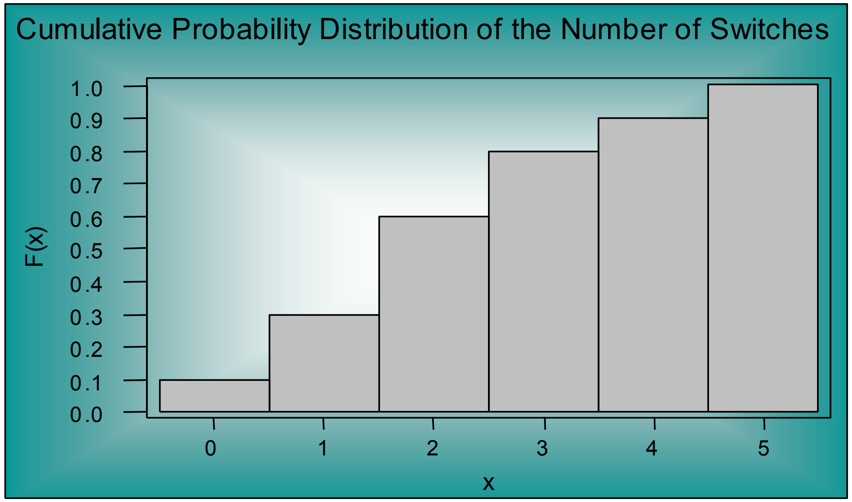
$$\left[\text{Zaključak : } 0 \leq P(X) \leq 1\right]$$

Kumulativna funkcija raspodjele

Kumulativna funkcija raspodjele, $F(x)$, prekidne slučajne promjenljive X je:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \leq x} P(i)$$

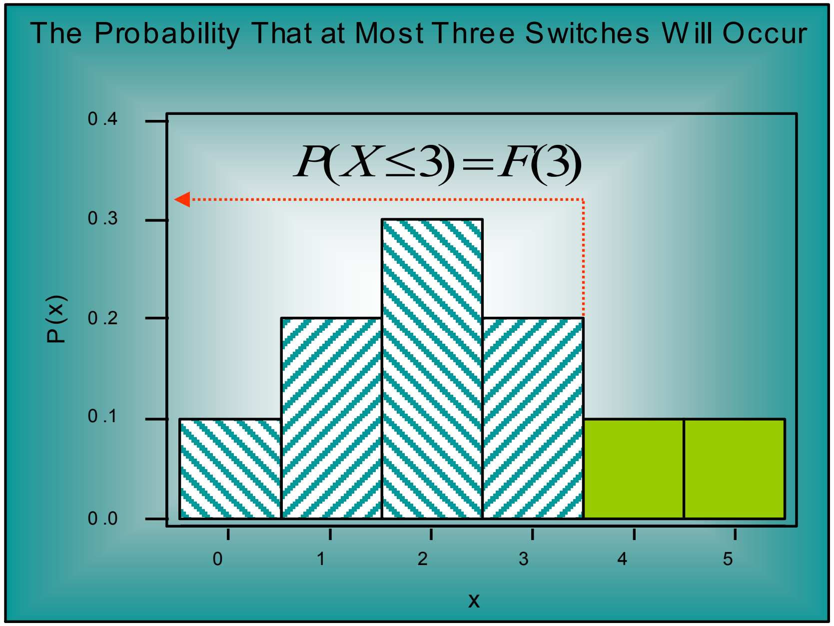
x	$P(x)$	$F(x)$
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
	1	



Kumulativna funkcija raspodjele

Vjerovatnoća da će se **najviše tri kvara** ostvariti:

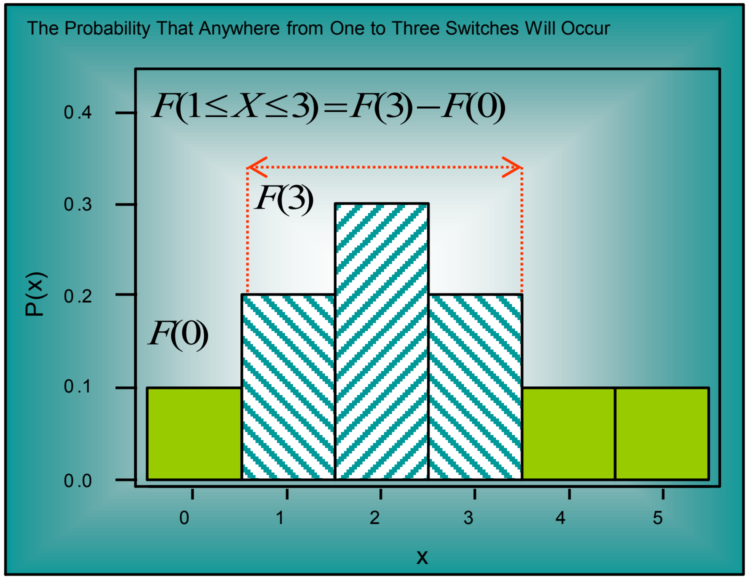
x	$P(x)$	$F(x)$
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
	1	



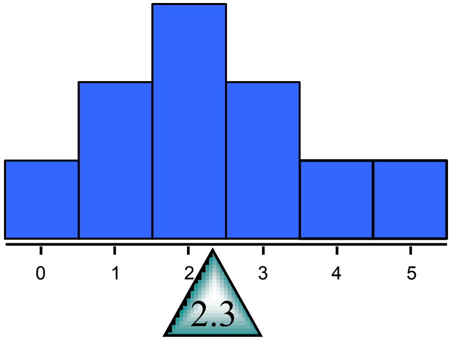
Korišćenje kumulativne raspodjele vjerovatnoće

Vjerovatnoća da će se ostvariti **od jednog do tri kvara**:

x	*P(x)*	*F(x)*
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
	1	



4-2 Očekivane vrijednosti prekidne slučajne promjenljive



Očekivana vrijednost prekidne slučajne promjenljive X je jednaka sumi proizvoda svake vrijednosti slučajne promjenljive i njene vjerovatnoće.

$$\mu = E(X) = \sum xP(x)$$

x	*P(x)*	*xP(x)*
0	0.1	0.0
1	0.2	0.2
2	0.3	0.6
3	0.2	0.6
4	0.1	0.4
5	0.1	0.5
	1.0	$2.3 = E(X) = \mu$

Slučajna promjenljiva

3 Sl. promjenljiva je definisana kao: $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & p \end{pmatrix}$
Odrediti p.

P=1-1/4-1/2=1/4

4. Slučajna promjenljiva

- Istraživanje bankarskog poslovanja dalo je sledeću raspodjelu vjerovatnoće za kamatne stope na dugoročne stambene kredite:

Kamatna stopa	7,0%	7,5%	8,0%	8,5%	Više od 8,5%
Vjerovatnoća	0,12	0,23	0,24	0,35	0,06

- Ako je iz ove raspodjele na slučaj odabrana banka, izračunati vjerovatnoću da je kamatna stopa koju ova banka zaračunava veća od 8,0%?
- P(X>8,0%)=P(X=8,5%)+p(više od 8,5%)=0,35+0,06=0,41

4. Slučajna promjenljiva

Na osnovu podataka iz prethodnog zadatka, kolika se kamatna stopa na dugoročne stambene kredite može očekivati na osnovu očekivane vrijednosti?

- $E(X)=\sum xP(x)=7\%*0{,}12+7{,}5\%*0{,}23+...+9\%*0{,}06=8\%$

4-3 Binomna raspodjela

Bernulijev proces je niz od *n* identičnih pokušaja koji zadovoljavaju sledeće uslove:

1. Svaki pokušaj ima dva moguća ishoda, koje zovemo ***uspjeh*** i **neuspjeh**. Ishodi su **međusobno isključivi** i **iscrpni**.
2. **Vjerovatnoća uspjeha**, u oznaci ***p***, ostaje **konstantna** u svakom pokušaju. **Vjerovatnoća neuspjeha** se označava sa ***q***, gdje je ***q = 1-p*.**
3. N pokušaja su **nezavisni**. Tj, ishod bilo kog pokušaja ne utiče na ishod ostalih.

Slučajnu promjenljivu, X, koja broji broj uspjeha u *n* Bernulijevih pokušaja zovemo **binomnom slučajnom promjenljivom**.

Binomna raspodjela vjerovatnoće

Binomna raspodjela vjerovatnoće

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

gdje :
p je vjerovatnoća uspjeha u jednom pokušaju,
$q = 1-p$,
n je broj pokušaja, i
x je broj uspjeha.

Broj uspjeha, x	Vjerovatnoca P(x)
0	$\frac{n!}{0!(n-0)!} p^0 q^{(n-0)}$
1	$\frac{n!}{1!(n-1)!} p^1 q^{(n-1)}$
2	$\frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 q^{(n-2)}$
3	$\frac{n!}{3!(n-3)!} p^3 q^{(n-3)}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{n!}{n!(n-n)!} p^n q^{(n-n)}$
	1.00

Binomne vjerovatnoće (Primjer)

Pretpostavimo da bacamo jedan ispravan novčić pet puta zaredom, i neka X predstavlja broj glava.

vjerovatnoća za 2 glave u 5 bacanja novčića:

$$P(X = 2) = 10 * (1/32) = (10/32) = .3125$$

10	(1/32)
Broj ishoda sa 2 glave	Vjerovatnoća svakog ishoda sa 2 glave

Primjer 4.5.

Neka je 20% svih autodjelova proizvedenih u jednoj fabrici neispravno. Ako biramo 4 autodijela slučajnim izborom, odrediti vjerovatnoću da su 3 od 4 neispravna.

$$P(x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{(n-x)} = \binom{4}{3} 0.2^{3} 0.8^{(4-3)} =$$

$$= \frac{4!}{3!(4-3)!} 0.008 * 0.8^{1} =$$

$$= 4 * 0.0064 = 0.0256$$

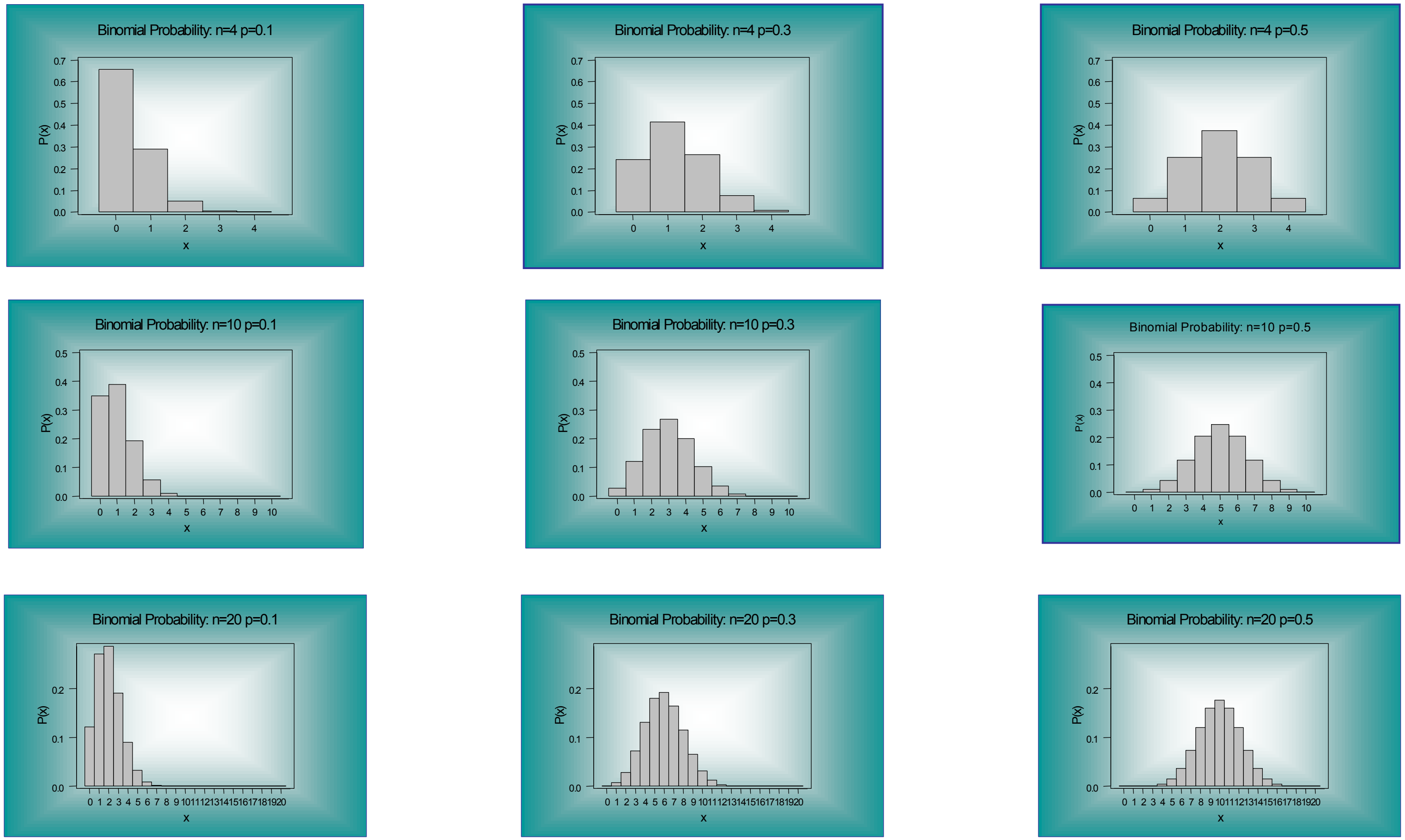
Oblik binomne raspodjele

p = 0.1   p = 0.3   p = 0.5

n = 4

n = 10

n = 20



Binomna raspodjela postaje više simetrična kako n raste i kako p $\to$ .5.

3-4 Ostale prekidne raspodjele vjerovatnoće: Poisson-ova

Poisson-ova raspodjela vjerovatnoće je korisna za određivanje vjerovatnoće broja pojavljivanja u datom vremenskom periodu ili u datom prostoru. Tako, Poisson-ova slučajna promjenljiva broji događaje u neprekidnom intervalu vremena ili prostora. Može se takođe koristiti za računanje približnih binomnih vjerovatnoća kada je vjerovatnoća uspjeha mala (*p≤0.05*) i broj pokušaja veliki (*n≥20*).

Poisson - ova raspodjela :

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \text{ for x } = 1,2,3,\ldots$$

Gdje je μ prosjek raspodjele (kao i varijansa) i
e je osnova prirodnog logaritma (*e=2.71828...*).

Ostale prekidne raspodjele vjerovatnoća: Poisson-ova (nastavak)

Primjer 4-6:
Mašina za pranje veša se kvari u prosjeku 3 puta mjesečno. Odrediti vjerovatnoću da će se tokom sledećeg mjeseca ova mašina pokvariti:

1) Tačno 2 puta;
2) Najviše jednom.

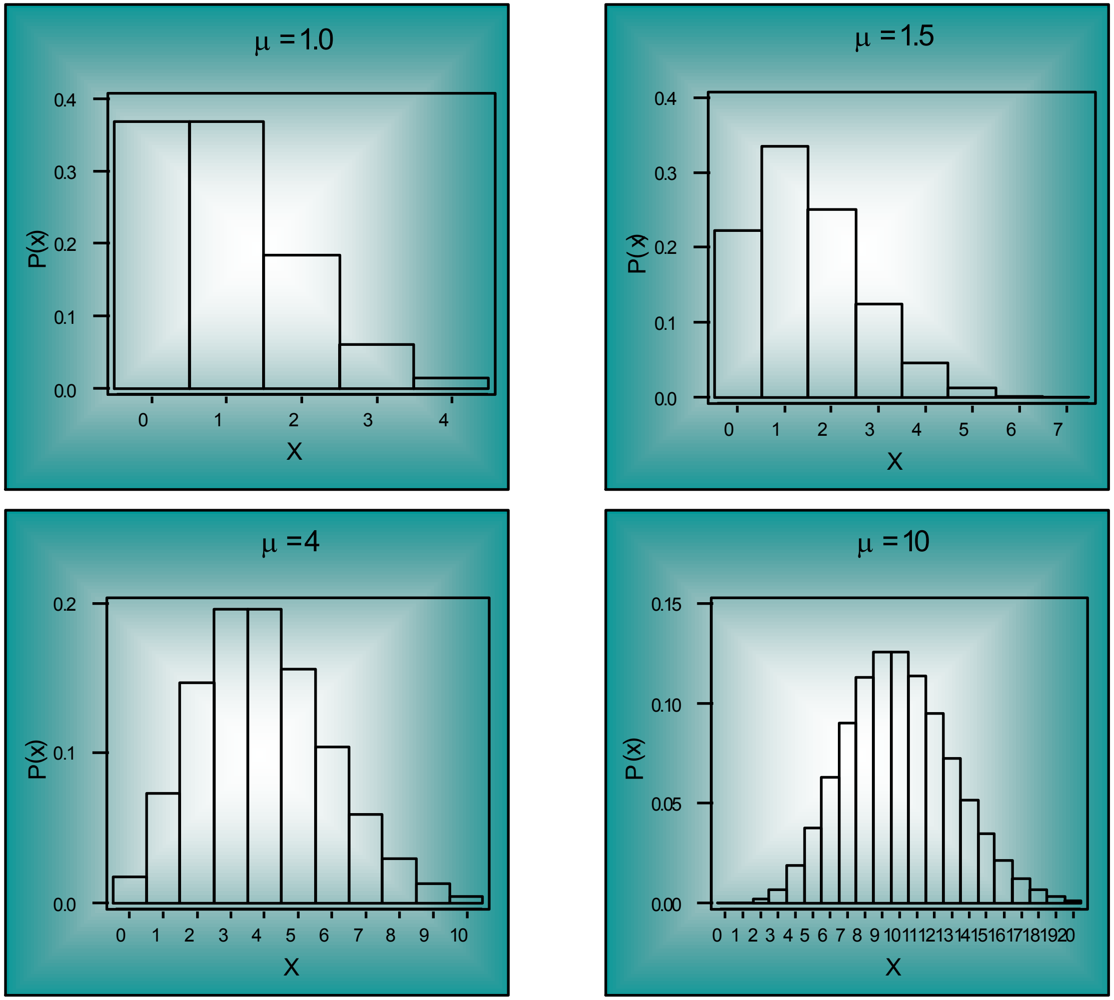
μ =3

$$1)P(x=2)=\frac{3^2 e^{-3}}{2!}=\frac{9*0.04979}{2}=0.224$$

$$2)P(x=0)+P(x=1)=\frac{3^0 e^{-3}}{0!}+\frac{3^1 e^{-3}}{1!}=$$

$$=\frac{1*0.04979}{1}+\frac{3*0.04979}{1}=0.1992$$

Ostale prekidne raspodjele vjerovatnoća: Poisson-ova (nastavak)



Ostale prekidne raspodjele vjerovatnoće: Hipergeometrijska

Hipergeometrijska raspodjela vjerovatnoće se koristi za određivanje broja događaja kada se vrši uzorkovanje *bez ponavljanja*. Broji broj uspjeha (*x*) u *n* izbora, *bez ponavljanja*, iz populacije od *N* elemenata, *S* od njih su uspjesi i *(N-S)* su neuspjesi.

Hipergeometrijska raspodjela :

$$P(x) = \frac{\binom{S}{X}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mu = np, \text{ gdje } p = \frac{S}{N}$$

$$\text{Varijansa je}: \sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)npq$$

Ostale prekidne raspodjele vjerovatnoće: Hipergeometrijska (nastavak)

Primjer 4-7:
Jedna korporacija ima 12 zaposlenih, od kojih je 7 žena i 5 muškaraca. Planira se slanje troje ljudi na konferenciju, od svih 12. Koja je vjerovatnoća da su sva tri poslata radnika žene?

$$P = \frac{\binom{7}{3}\binom{(12-7)}{(3-3)}}{\binom{12}{3}} = \frac{\binom{7}{3}\binom{5}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{35}{220}$$

Slučajna promjenljiva

8. Eksperiment bacanja novčića ima:
   - Hipergeometrijsku raspodjelu
   - Poissonovu raspodjelu
   - Uniformnu raspodjelu
   - **Binomnu raspodjelu**